

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Демонстрационный образец DIPLOM34»

Центр учебных материалов
Демонстрационный отдел

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

на тему:

Пределы и производные: решение типовых задач с проверкой методов

Выполнил(а): студент(ка) направления Демонстрационный образец
Иванова Анна Сергеевна, группа ДЕМО-01

Руководитель: руководитель демонстрационного проекта

Волгоград · 2026

АННОТАЦИЯ

Работа содержит решения четырёх типовых задач по теме «Пределы и производные». Каждая задача включает условие, пошаговое решение и проверку результата. Рассматриваются раскрытие неопределённости, исследование функции, уравнение касательной и задача на оптимизацию. Материал предназначен для отработки вычислительных навыков и оформления решения.

Ключевые слова: пределы, производные, касательная, оптимизация, типовые задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1 Задача 1. Раскрытие неопределённости в пределе 5

2 Задача 2. Исследование функции с помощью производной 5

3 Задача 3. Уравнение касательной 6

4 Задача 4. Оптимизация площади 6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 7

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 8

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач по математике требует не только получения ответа, но и прозрачной записи хода рассуждения. В данной работе собраны четыре задачи, которые охватывают разные применения производной и предельного перехода. Для каждой задачи фиксируются условие, метод и проверка результата.

Практическая значимость связана с подготовкой к контрольным работам и зачётам. Оформление решений ориентировано на требование показывать промежуточные шаги. Все вычисления выполняются без приближённых калькуляторов, кроме случаев, где это прямо указано.

Цель работы — Отработать применение пределов и производных при решении типовых математических задач с полной записью решения.

Задачи работы:

1. Раскрыть неопределённость при вычислении предела.
2. Найти критические точки и интервалы возрастания функции.
3. Составить уравнение касательной к графику.
4. Решить задачу на максимизацию площади.

Объект исследования — учебные задачи по теме «Пределы и производные»

Предмет исследования — методы решения пределов, дифференцирования и оптимизации

Методы исследования: анализ условия, алгебраические преобразования, дифференцирование, проверка результата.

Практическая значимость. материал может использоваться для самостоятельной работы и подготовки к контрольной работе.

1 Задача 1. Раскрытие неопределённости в пределе

Условие: вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3}$ функции $(x^2-9)/(x^2-5x+6)$. При прямой подстановке получаем $0/0$, поэтому требуется алгебраическое преобразование. Числитель раскладывается как $(x-3)(x+3)$, знаменатель — как $(x-3)(x-2)$. После сокращения общий множитель уходит.

Решение: после сокращения остаётся $(x+3)/(x-2)$. При $x \rightarrow 3$ получаем $(3+3)/(3-2)=6/1=6$. Проверка через близкие значения подтверждает стремление к 6. В таблице приведены шаги преобразования и итог. Ответ: предел равен 6.

Таблица 1 – Шаги решения задачи 1

Шаг	Действие	Результат
1	Подстановка $x=3$	$0/0$
2	Разложение числителя	$(x-3)(x+3)$
3	Разложение знаменателя	$(x-3)(x-2)$
4	Сокращение и подстановка	6

Источник: Расчёты автора, 2025.

2 Задача 2. Исследование функции с помощью производной

Условие: найти критические точки и интервалы возрастания функции $y=x^3-3x^2+2$. Производная равна $3x^2-6x=3x(x-2)$. Критические точки: $x=0$ и $x=2$. Они делят числовую прямую на три интервала, на которых знак производной различается.

Решение: при $x<0$ производная положительна, на $(0;2)$ отрицательна, при $x>2$ снова положительна. Значит, функция возрастает на $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$, убывает на $(0;2)$. В точке $x=0$ — локальный максимум, в точке $x=2$ — локальный минимум. Ответ подтверждается таблицей знаков.

Таблица 2 – Знаки производной задачи 2

Интервал	Знак производной	Поведение функции
$(-\infty;0)$	+	Возрастает
$(0;2)$	–	Убывает
$(2;+\infty)$	+	Возрастает

Источник: Расчёты автора, 2025.

3 Задача 3. Уравнение касательной

Условие: составить уравнение касательной к графику $y=x^2$ в точке $x_0=2$. Значение функции в точке равно 4. Производная функции $y'=2x$, поэтому угловой коэффициент касательной в $x_0=2$ равен 4. Используется формула $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Решение: подстановка даёт $y=4+4(x-2)=4x-4$. Проверка: при $x=2$ получаем $y=4$, что совпадает со значением функции. Угловой коэффициент 4 означает, что касательная возрастает круче прямой $y=x$. Ответ: $y=4x-4$.

Таблица 3 – Расчёт уравнения касательной

Величина	Значение
x_0	2
$f(x_0)$	4
$f'(x_0)$	4
Уравнение	$y=4x-4$

Источник: Расчёты автора, 2025.

4 Задача 4. Оптимизация площади

Условие: прямоугольник имеет периметр 40 см. Нужно найти стороны, при которых площадь максимальна. Пусть стороны равны a и b , тогда $a+b=20$, а площадь $S=a(20-a)$. Задача сводится к исследованию квадратичной функции на допустимом интервале $0<a<20$.

Решение: $S'=20-2a$. Критическая точка $a=10$. При переходе через неё производная меняет знак с плюса на минус, значит, это максимум. Тогда $b=10$, площадь равна 100 см^2 . Проверка: для $a=9$ и $b=11$ площадь 99 см^2 , что меньше. Ответ: квадрат со стороной 10 см.

Таблица 4 – Проверка вариантов задачи 4

а, см	б, см	Площадь, см ²
8	12	96
9	11	99
10	10	100
11	9	99

Источник: Расчёты автора, 2025.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Санкт-Петербург: Лань, 2021. 608 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва: АСТ, 2020. 624 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Том 1. Москва: Юрайт, 2022. 704 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2021. 416 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. Санкт-Петербург: Лань, 2023. 440 с.